Epreuve Pratique de Mathématiques
Sujet 003 : Problème d'optimisation

1.(a) Utiliser un logiciel de géométrie pour simuler la situation décrite

- La figure ci-dessous est réalisée au moyen du logiciel GéoPlan
- La longueur de la gouttière MA+MB+MH est notée "Long"
- La mesure de l'angle aigu $\widehat{BMQ} = \theta$ est notée "Angl"
- La longueur MI=QB sera notée "x" dans les calculs qui suivront
- Le point I, construit par commodité, est le milieu de [AB]
- Les nombres sont affichés avec une précision de 2 décimales
- Pour information, le texte de la figure est édité ci-contre:

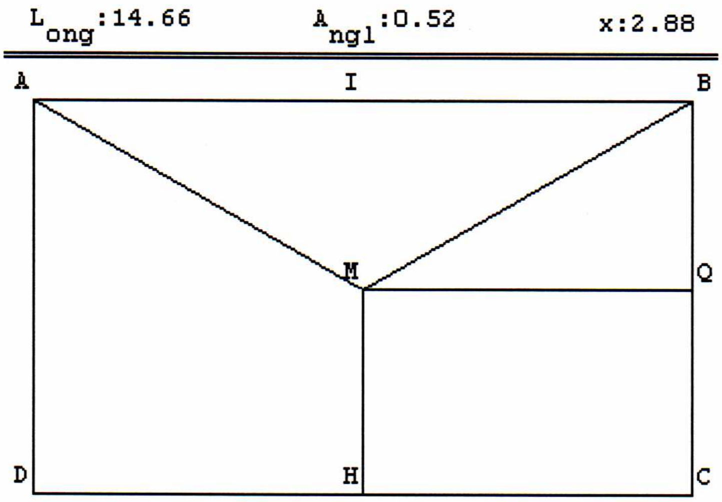


Figure Géoplan
Numéro de version: 2

Position de Roxy: Xmin: -8.14447313388, Xmax: 8.14447313388, Ymax: 7.58916814748
Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, non dessiné

A point de coordonnées (-5,6) dans le repère Roxy
B point de coordonnées (5,6) dans le repère Roxy
C point de coordonnées (5,0) dans le repère Roxy
D point de coordonnées (-5,0) dans le repère Roxy
H point de coordonnées (0,0) dans le repère Roxy
I point de coordonnées (0,6) dans le repère Roxy
M point libre sur le segment [HI]
  Objet libre M, paramètre: 0.51931299654
Q projeté orthogonal de M sur (BC)
Segment [AB]
Segment [BC]
Segment [CD]
Segment [DA]
Segment [AM]
Segment [MB]
Segment [MH]
Segment [MQ]
Long = AM+MB+MH (unité de longueur Uoxy)
Angl mesure de l'angle géométrique BMQ en radian
x longueur du segment [MI] (unité de longueur Uoxy)

Hauteur de la zone des affichages: 30
Af0 affichage du scalaire Long (2 décimales)
  Position de l'affichage Af0: (236,4)
Af1 affichage du scalaire Angl (2 décimales)
  Position de l'affichage Af1: (375,4)
Af2 affichage du scalaire x (2 décimales)
  Position de l'affichage Af2: (471,6)

Commentaire

Fin de la figure

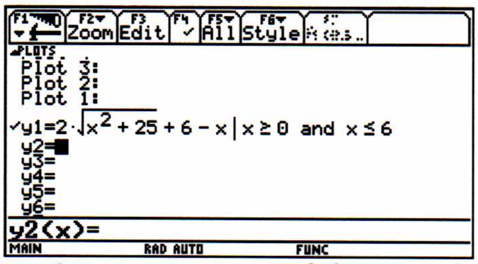
(b) En déduire une valeur approchée au centième de la valeur de θ qui rend minimale la longueur des tuyaux
Déterminer grâce au logiciel une valeur approchée au centième de la longueur minimale totale des tuyaux

- En déplaçant le point libre M, il apparaît que la longueur minimale des tuyaux est obtenue pour $\boxed{\text{Angl}\approx 0{,}52}$
- Cette longueur minimale est alors $\boxed{\text{Long}\approx 14{,}66 \text{ mètres}}$

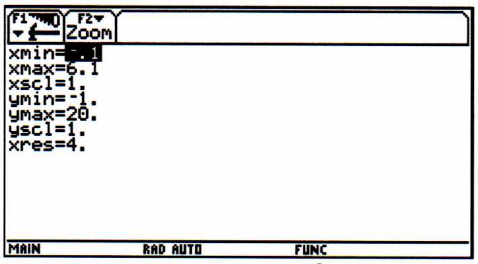
2. On définit la fonction $g : \theta \mapsto g(\theta) = 2MA + MH$ sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

- Dans l'énoncé, $g(\theta)$ est exprimée en fonction de MA et MH , nous devons donc expliciter ces deux longueurs
- Posons MI=x. Appliquons la propriété de Pythagore dans le triangle BMQ rectangle en Q,
  il vient alors $MB^2 = QB^2 + MQ^2$
  soit aussi $MB^2 = 5^2 + x^2$ puisque MQ=AB/2 avec AB=10 par hypothèse, et QB=MI=x
  finalement: $MA = MB = \sqrt{25+x^2}$
- La figure donne $IH = IM + MH$
  c'est-à-dire $MH = IH - IM$ avec IM=x et IH=BC=6
  il vient: $MH = 6 - x$
- Par suite, on a: $g : \theta \mapsto g(\theta) = 2MA + MH \iff \boxed{g(\theta) = 2\sqrt{x^2+25} + 6 - x \quad \text{en posant } x = BQ}$
- A présent, il reste à établir une relation entre la variable x (choisie) et la variable θ (imposée dans l'énoncé)

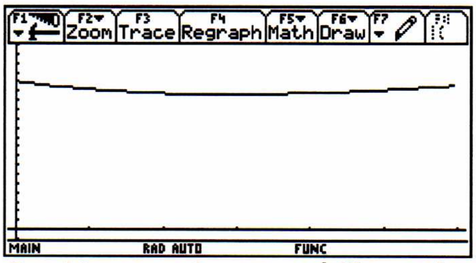
Remarques personnelles de l'enseignant:
A ce niveau de l'étude, une petite recherche au brouillon au moyen de la calculatrice devrait permettre de nous éclairer quant aux valeurs à obtenir ...



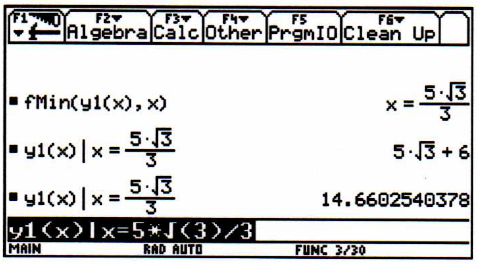
La fonction $g(\theta)$ n'a été exprimée qu'au moyen de la variable x, choisie arbitrairement par nous.



La variable x représente une longueur, donc forcément positive, et nécessairement inférieure à 6



Graphiquement, on vérifie qu'un minimum de la fonction est obtenu sur l'intervalle [0;6]



- Le minimum de la fonction g est obtenu pour $x = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$
- Ce minimum est alors $g(\theta) = 5\sqrt{3} + 6 \approx 14{,}66$

- L'énoncé nous impose d'exprimer la fonction g en fonction de la variable $\widehat{BMQ} = \theta$
  Dans le triangle BMQ , rectangle en Q , nous pouvons établir les relations trigonométriques suivantes:

$$\sin(\theta) = \frac{BQ}{MB} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{MQ}{MB} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{BQ}{MQ}$$

c'est-à-dire

$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{x^2+25}} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{x}{5}$$

- Partant de $g(\theta) = 2\sqrt{x^2+25} + 6 - x$ obtenue précédemment,

  l'expression du sinus s'écrit aussi $\sqrt{x^2+25} = \dfrac{x}{\sin(\theta)}$

  par suite il vient $g(\theta) = 2\dfrac{x}{\sin(\theta)} + 6 - x$

- L'expression de la tangente s'écrit aussi $x = 5\tan(\theta)$

  l'expression $g(\theta)$ donne en conséquence $g(\theta) = 2\dfrac{5\tan(\theta)}{\sin(\theta)} + 6 - 5\tan(\theta)$

- Avec $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ il vient aussi $g(\theta) = 10\dfrac{\dfrac{\cancel{\sin(\theta)}}{\cos(\theta)}}{\cancel{\sin(\theta)}} + 6 - 5\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

  que l'on note donc $g(\theta) = \dfrac{10}{\cos(\theta)} + 6 - 5\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

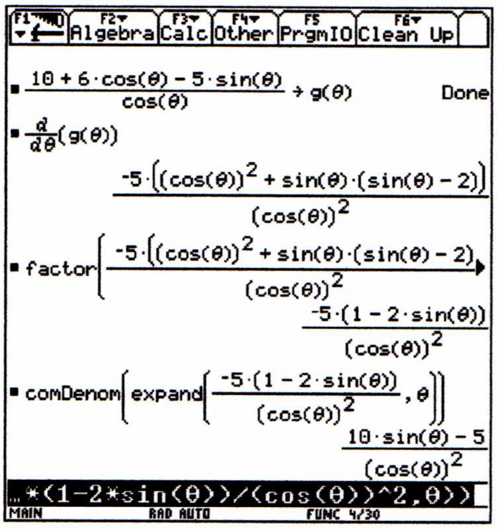
- Avec réduction au même dénominateur: $\boxed{g(\theta) = \dfrac{10 + 6\cos(\theta) - 5\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$ fonction définie sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Remarques personnelles de l'enseignant:

Afin d'éviter le calcul de la dérivée d'une expression fausse de g(θ), il peut être prudent de réaliser la vérification ci-contre à la calculatrice:

Nous obtenons:

$$g'(\theta)=\frac{d\left(\overbrace{\frac{10+6\cos(\theta)-5\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}^{\text{fonction trouvée par calculs: A tester}}\right)}{d\theta}=\overbrace{\left[\underbrace{\frac{10\sin(\theta)-5}{(\cos(\theta))^2}}_{\text{à la calculatrice}}=5\times\underbrace{\frac{2\sin(\theta)-1}{(\cos(\theta))^2}}_{\text{donné dans l'énoncé}}\right]}^{\text{Résultats conformes, donc notre fonction de départ g(θ) est bonne, et nous pouvons effectuer les calculs}}$$



(a) On note g' la fonction dérivée de g. Démontrer que $g'(\theta)=5\times\frac{2\sin(\theta)-1}{(\cos(\theta))^2}$

- La fonction g est le quotient de deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle d'étude $]0;\pi/2[$
- Notons $u(\theta)=10+6\cos(\theta)-5\sin(\theta)$ qui donne $u'(\theta)=0-6\sin(\theta)-5\cos(\theta)$

  et $v(\theta)=\cos(\theta)$ donc $v'(\theta)=-\sin(\theta)$

  alors il vient $g'(\theta)=\frac{u'(\theta)v(\theta)-v'(\theta)u(\theta)}{(v(\theta))^2}$

  c'est-à-dire $g'(\theta)=\frac{[-6\sin(\theta)-5\cos(\theta)]\times[\cos(\theta)]-[-\sin(\theta)]\times[10+6\cos(\theta)-5\sin(\theta)]}{(\cos(\theta))^2}$

  et donc $g'(\theta)=\frac{[\cancel{-6\sin(\theta)\times\cos(\theta)}-5\cos^2(\theta)]+[10\sin(\theta)+\cancel{6\cos(\theta)\times\sin(\theta)}-5\sin^2(\theta)]}{(\cos(\theta))^2}$

  par suite $g'(\theta)=\frac{-5\left(\overbrace{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}^{=1}\right)+10\sin(\theta)}{(\cos(\theta))^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{g'(\theta)=\frac{-5+10\sin(\theta)}{(\cos(\theta))^2}=5\times\frac{2\sin(\theta)-1}{(\cos(\theta))^2}}$ CQFD

(b) Déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux

- La fonction g admet un extrémum, en l'occurrence un minimum, pour la valeur θ qui annulera g sur $]0;\pi/2[$
- Il vient successivement:

  $g'(\theta)=0 \Leftrightarrow 5\times\frac{2\sin(\theta)-1}{(\cos(\theta))^2}=0 \Leftrightarrow 2\sin(\theta)-1=0 \Leftrightarrow \sin(\theta)=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{6}\approx 0{,}52}$

- La longueur des tuyaux est alors:

  $\text{Long}=g\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \text{Long}=\frac{10+6\cos(\pi/6)-5\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} \Leftrightarrow \text{Long}=\frac{10+6\times\sqrt{3}/2-5/2}{\sqrt{3}/2} \Leftrightarrow \boxed{\text{Long}=5\sqrt{3}+6}$

Remarques personnelles de l'enseignant: A défaut d'arriver en 60 minutes d'épreuve à tout résoudre,

→ il est impératif de savoir établir la figure [question 1a]

→ il est également primordial de savoir déplacer le point M sur cette figure afin d'évaluer numériquement l'angle θ et la longueur minimale des tuyaux [question 1b]

assurer ce qui précède devrait vous garantir **2 points sur 4** à l'Epreuve Pratique de Mathématiques

→ trouver la valeur θ qui minimise la longueur est simple puisque g'(θ) est donnée dans l'énoncé [question 2b]

assurer ce qui précède devrait vous garantir **2,5 points sur 4** à l'Epreuve Pratique de Mathématiques

→ établir l'expression de g(θ) en fonction de x est techniquement simple [question 2a partielle]

assurer ce qui précède devrait vous garantir **3 points sur 4** à l'Epreuve Pratique de Mathématiques

→ établir l'expression de g(θ) en fonction de θ peut dérouter quelques candidats … [question 2a]

assurer ce qui précède devrait vous garantir **4 points sur 4** à l'Epreuve Pratique de Mathématiques