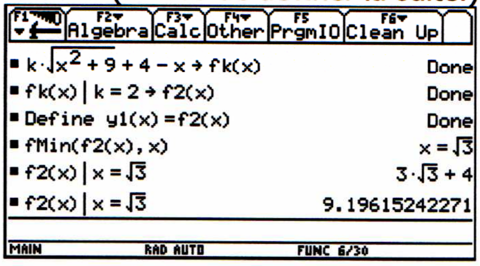
Epreuve Pratique de Mathématiques
Sujet 016: Modélisation d'une situation géométrique

Remarques personnelles de l'enseignant:

→ Bien que la question ne soit pas posée, à l'oral l'examinateur pourrait vous demander de justifier l'intervalle de définition [0;4] de la fonction $f_k(x)$, qui à priori peut être calculée pour tout x de $\mathbb{R}$. La réponse ne peut pas être trouvée par une étude de l'expression algébrique de la fonction f_k , mais plutôt par une justification de son application au problème posé: la longueur x dépend de la position du point M qui ne peut évoluer qu'entre les points H et F. Or, le triangle CHF (rectangle en H) est tel que CH=3 et CF=5 donc (à vous de deviner la suite!)

→ Avant d'entreprendre la rédaction du problème posé, un survol rapide des premières questions associé à une étude sommaire de la fonction f_k au moyen d'une calculatrice devrait nous donner une vision d'ensemble du problème posé, et nous permettre par conséquent d'adapter nos réponses aux questions posées: $\sqrt{3} \approx 1,73$ et $3\sqrt{3}+4 \approx 9,196$

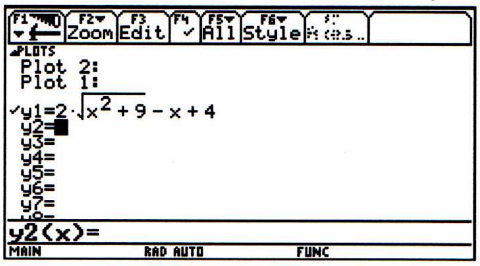
Recherche personnelle au brouillon ⇒

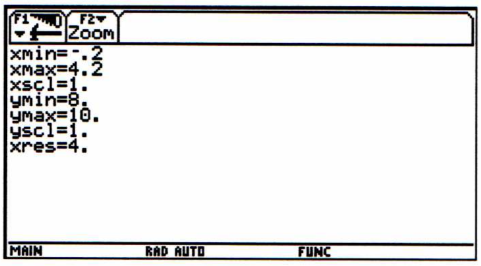


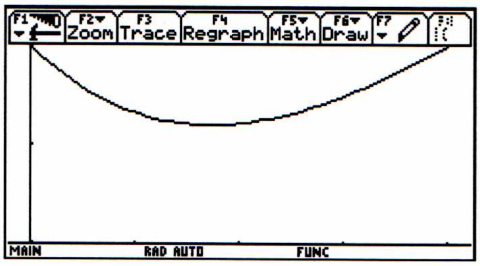
I Etude expérimentale

1.(a) Tracer sur la calculatrice, en choisissant une fenêtre adaptée, la représentation graphique de la fonction f_2.

- L'énoncé nous indique que les fonctions f_k ne sont définies que pour x de [0;4] , une fenêtre adaptée à la visualisation doit tenir compte de cette condition. On obtient donc le résultat suivant:

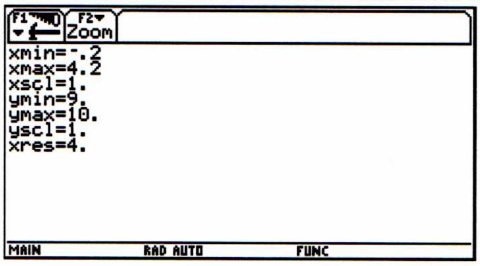


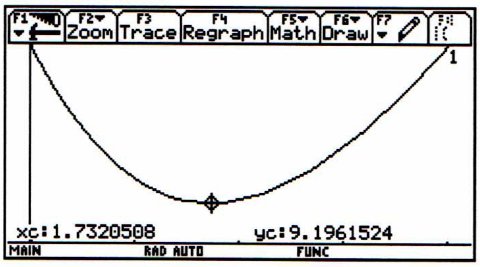




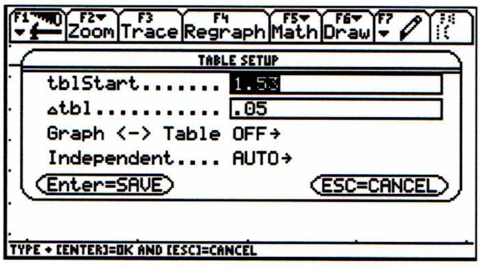
(b) Déterminer graphiquement ou à l'aide d'une table de valeurs un encadrement à 10^{-1} près de la distance HM en kilomètres correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant

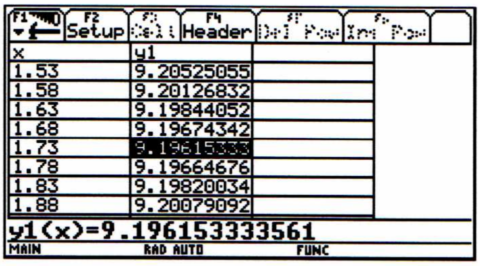
- Un autre réglage de la fenêtre graphique nous permettra de mieux apprécier encore l'existence d'un minimum
- On conjecture alors un encadrement à 10^{-1} près de la distance HM=x recherchée: $\boxed{1,68 \leq x \leq 1,78}$ en km



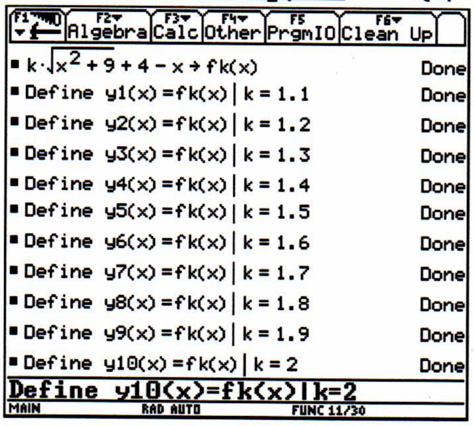


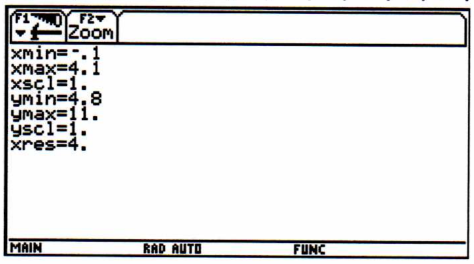
- On peut aussi rechercher le minimum au moyen d'un tableau de valeurs, on obtient le même encadrement de la distance correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant

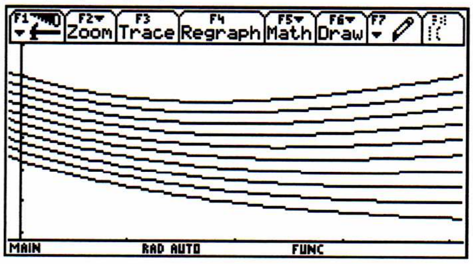




2.(a) Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, les représentations graphiques des fonctions f_k pour $k \in \{1,1\,;\,1,2\,;\,1,3\,;\,1,4\,;\,1,5\,;\,1,6\,;\,1,7\,;\,1,8\,;\,1,9\,;\,2\}$

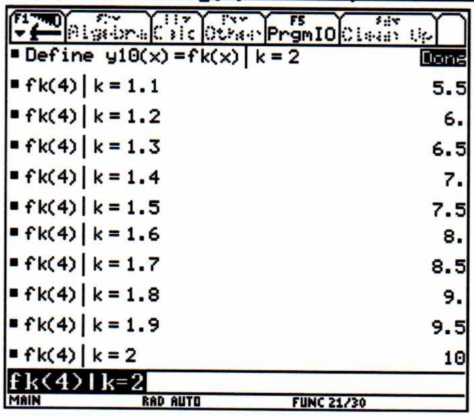


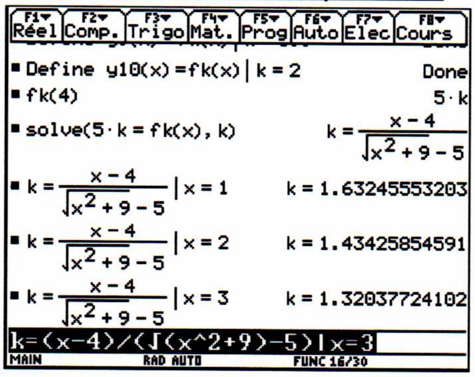




Remarque personnelle de l'enseignant:
Un ZoomBox aura permit d'ajuster au mieux la fenêtre des représentations graphiques obtenues

(b) Calculer $f_k(4)$ et interpréter cette valeur dans le cadre du problème





Remarques personnelles du prof:

- Dans la mesure où l'énoncé ne précise pas s'il faut calculer $f_k(4)$ pour les valeurs numériques de k de la question précédente (je ne le pense pas) , ou bien si l'on souhaite obtenir l'expression littérale de $f_k(4)$ en fonction de k (plus probable selon moi), les deux calculs ont été réalisés ici
- Pour l'interprétation et la justification des résultats de cette question, ainsi que des suivantes, reportez-vous à la synthèse faite en fin de copie

(c) Observer, expliquer et conjecturer la valeur k_0 au-dessous de laquelle il est inutile de rejoindre la route

- Graphiquement, nous pouvons conjecturer les valeurs limites de k (suivant trois valeurs de x) au-dessous desquelles il devient inutile pour l'agriculteur de rejoindre la route:

$k_{x=1} \approx 1,6$ $\qquad$ $k_{x=2} \approx 1,4$ $\qquad$ $k_{x=3} \approx 1,3$

II Détermination de la fonction "consommation"

1. Exprimer CM en fonction de x

- On exprime CM au moyen de la propriété de Pythagore appliquée au triangle CHM rectangle en H, il vient successivement: $CM^2 = HM^2 + CH^2 \Leftrightarrow CM^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow \boxed{CM = +\sqrt{x^2+9}}$ puisque CM est un nombre positif

2. Démontrer que, pour tout réel x de [0;4] $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9} + 4 - x$ *(détails ci-après)*

Remarques personnelles de l'enseignant: Synthèse sur le problème posé

- Un agriculteur doit se rendre de son champ C à sa ferme F, deux trajets se présentent à lui:
  - → Trajet 1: Il peut choisir d'aller en ligne droite, et parcourra alors la distance CF de 5 km
  - → Trajet 2: Ou alors, il peut décider de couper par la route, et parcourra alors la distance CM+MF
- Son choix est strictement guidé par une volonté d'économiser sa consommation de carburant.

Or, celle-ci dépend directement d'un coefficient k lié à l'état du terrain.

→ Si le terrain est la route : $k=1$ (valeur déduite d'une lecture pertinente de l'énoncé)
→ Si le terrain est sec et plat : $k=1,2$ (par exemple)
→ Si le terrain est mouillé et plat : $k=1,4$ (par exemple)
→ Si le terrain est sec et vallonné : $k=1,6$ (par exemple)
→ Si le terrain est mouillé et vallonné : $k=1,8$ (par exemple)

- Cherchons à exprimer la consommation C(k) du tracteur suivant l'état du terrain et le parcourt choisi:

→ Trajet 1: On a alors $C_1(k)=k\times CF$ c'est-à-dire directement $\boxed{C_1(k)=5k}$ puisque CF=5 (en kilomètres)

→ Trajet 2: Il vient $C_2(k)=k(CM+MF) \Leftrightarrow C_2(k)=k\times CM+k\times MF$

Or, sur la route, on a $k=1$ et $MF=HF-HM$ qui donne $MF=4-x$

Pour trouver HF=4 , on a appliqué le théorème de Pythagore dans CHF puisque $(CH)\perp(HF)$

On peut donc écrire $C_2(k)=k\times CM+1\times(4-x)$ <u>Attention</u>: $k\neq1$ sur la distance CM

Donc plus simplement $C_2(k)=k\times CM+(4-x)$

On exprime CM au moyen là encore de la propriété de Pythagore appliquée au triangle CHM rectangle en H, il vient donc assez simplement $CM=\sqrt{x^2+9}$ [question II.1]

On déduit ainsi: $\boxed{C_2(k)=k\sqrt{x^2+9}+(4-x)}$ [Démonstration de la question II.2]

Remarquons au passage que les consommations C_1 et C_2 expriment numériquement un nombre de litres de carburant pour partir du champ (point C) et aller à la ferme (point F)

- Calculons $C_2(k)$ lorsque $x=4$, c'est-à-dire lorsque le point M est en F:

$$\begin{cases} C_2(k)=k\sqrt{x^2+9}+(4-x) \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow C_2(k)=k\sqrt{4^2+9}+(4-4) \Leftrightarrow C_2(k)=k\sqrt{16+9} \Rightarrow \boxed{C_2(k)=5k \mid x=4}$$

On retrouve donc l'expression de la consommation $C_1(k)$ du trajet en ligne droite [question I.2.(b)]

- Maintenant, on nous précise aussi dans l'énoncé que le fermier, pragmatique, pense que suivant une certaine valeur k_0 il n'est pas utile de rejoindre la route, et que couper directement à travers champs ne consommera pas plus de carburant. Mathématiquement, cela revient à trouver k telle que $C_1(k)=C_2(k)$

Cette valeur est obtenue directement à la calculatrice: $k=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+9}-5}$ [voir copie d'écran question I.2.(b)]

Remarquons tout de suite que la valeur de k va dépendre de la valeur de x, l'énoncé nous induit donc en erreur en laissant penser qu'une seule valeur de k , notée k_0 , existe ; on voit clairement ici que la position de M entre les points H et F est fondamentale. Calculons par exemple k pour différentes valeurs de x:

$$k_{x=1}=\frac{\sqrt{10}+5}{5}\approx1,6 \qquad k_{x=2}=\frac{\sqrt{13}+5}{6}\approx1,4 \qquad k_{x=3}=\frac{3\sqrt{2}+5}{7}\approx1,3$$ [question I.2.(c)]

<u>Barème type</u>: Vous pouvez à présent, si vous le souhaitez, évaluer objectivement votre travail sur cette EPM

I	1	(a)	:	0,5	pt	choix adapté de la fenêtre de visualisation / questionner sur l'intervalle de définition
		(b)	:	0,5	pt	vérifier la largeur de 10^{-1} de l'encadrement / 1,73 doit être dans l'intervalle choisi
	2	(a)	:	0,5	pt	choix adapté de la fenêtre de visualisation / toutes les courbes doivent être tracées
		(b)	:	1	pt	sens que donne le candidat à l'ensemble du sujet (l'interroger) / calcul de $f_k(4)$
		(c)	:	0,5	pt	lecture graphique de k_0 (suivant la valeur de x)
II	1		:	0,25	pt	calcul de CM (théorème de Pythagore: 0,125 point / expression de CM: 0,125 point)
	2		:	0,75	pt	cohérence de la démonstration, interroger le candidat sur le sens global du sujet

- Lors du 1er appel de l'examinateur, demander au candidat de justifier l'intervalle de définition de $f_k(x)$ et:

→ si la réponse est claire et sans équivoque, ne retirer aucun point à la note finale sur 4 points
→ si la réponse est alambiquée, mais avec un soupçon de compréhension, retirer 0,25 point sur le total
→ si le candidat veut commencer à justifier l'intervalle de définition de la fonction par un lien avec sa forme algébrique, c'est-à-dire s'il commence à vouloir s'embarquer dans des calculs avec $f_k(x)$, c'est qu'alors il n'a rien compris au sens à donner au sujet. Lui retirer 0,5 point sur sa note totale sur 4 pts.