Epreuve Pratique de Mathématiques

Sujet 021: Equation différentielle et méthode d'Euler

1. Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée)

- On sait que n est une valeur donnée, donc $\left(1-\frac{2}{n}\right)$ est constant quelque soit $k \in [0;n-1]$
- Ainsi, l'expression $y_{k+1} = \left(1-\frac{2}{n}\right) y_k$ est caractéristique d'une suite géométrique de raison $q = 1-\frac{2}{n}$ et de premier terme $y_0 = 1$ (donné en énoncé). On pourra donc écrire $y_k = y_0 \times q^k$ qui donne $\boxed{y_k = \left(1-\frac{2}{n}\right)^k}$

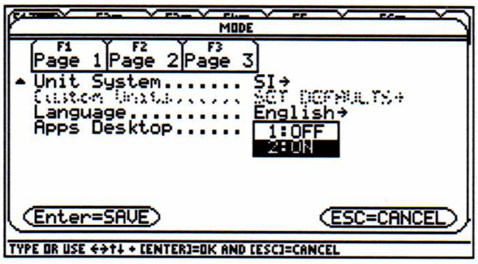
2. A l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau

- La valeur de n est placée dans la cellule A2, et le pas h=1/A2 en A4
- On sait que $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}$, on saisira donc en **C3** la formule: $\boxed{= C2 + 1/\$A\$2}$ il suffit ensuite d'effectuer une recopie vers le bas jusqu'en C12
- Puisque $y_{k+1} = \left(1-\frac{2}{n}\right) y_k$ avec n en A2, on entre en **D3** la formule: $\boxed{= (1-2/\$A\$2) * D2}$ il suffit ensuite d'effectuer une recopie vers le bas jusqu'en D12
- Pour remplir la colonne B, il est possible d'écrire en B3 la formule: =B2+1 puis de recopier en bas

	A	B	C	D
1	Valeur de n égale à	k	xk	yk
2	10	0	0	1
3	Pas égal à	1	0,1	0,8
4	0,1	2	0,2	0,64
5		3	0,3	0,512
6		4	0,4	0,4096
7		5	0,5	0,32768
8		6	0,6	0,262144
9		7	0,7	0,2097152
10		8	0,8	0,16777216
11		9	0,9	0,134217728
12		10	1	0,107374182

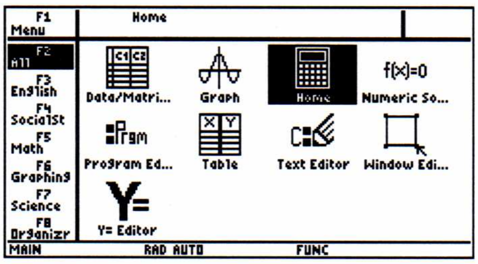
Remarques personnelles de l'enseignant:

- Dans l'énoncé, il est demandé d'utiliser un tableur, mais le modèle de celui-ci ne sera jamais imposé. En particulier, si vous disposez sur votre calculatrice d'un tableur et que vous y êtes habitué, il vous est tout à fait possible de l'utiliser plutôt que le tableur installé sur ordinateur que vous maitrisez peut-être moins bien.
- Pour utiliser le tableur de votre calculatrice, sous réserve bien entendu que celle-ci en soit dotée, veuillez suivre les différentes étapes ci-après:



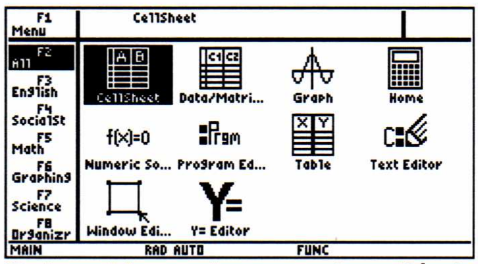
Activer le bureau des applications

[ON] [MODE] [F3] "Apps 2:ON" [ENTER]

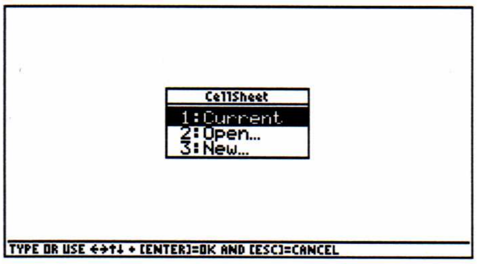


Eteindre puis rallumer la calculatrice

[ENTER] [2nd] [ON] [ON]

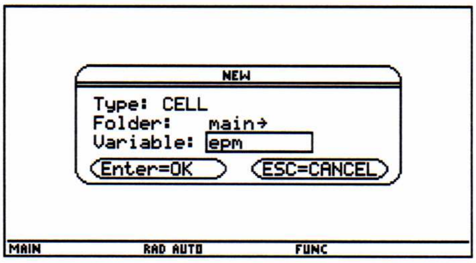


Si le tableur n'est pas installé, le télécharger depuis le site du constructeur, puis charger cette application flash sur votre machine



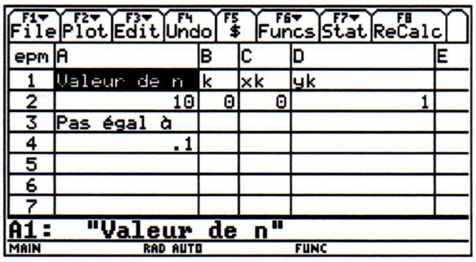
Puis, lancer l'application "CellSheet"

ENTER



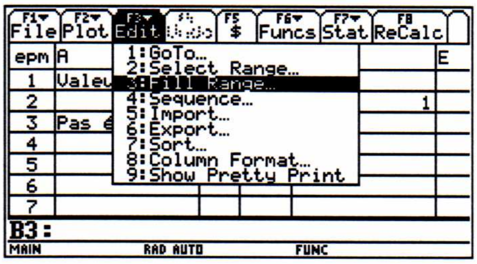
Créer un nouveau fichier "epm"

⊙ ⊙ ENTER ⊙ epm ENTER ENTER



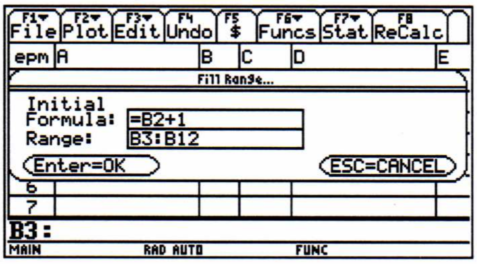
Remplir la feuille de calcul. Par défaut, les nombres sont centrés à droite et les lettres à gauche

Compléter la colonne B

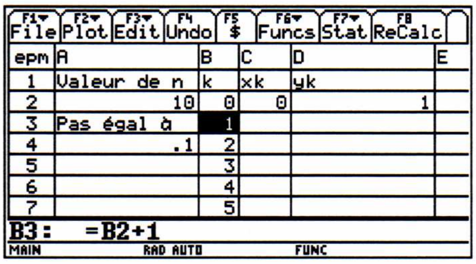


Se placer en B3, puis:

F3 ⊙ ⊙ ENTER

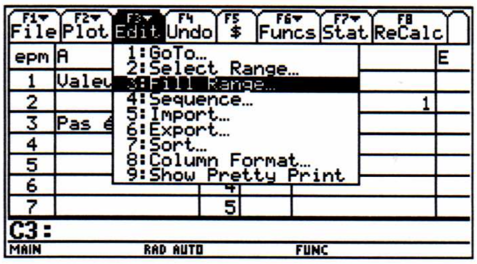


Saisir la formule, puis ENTER ENTER



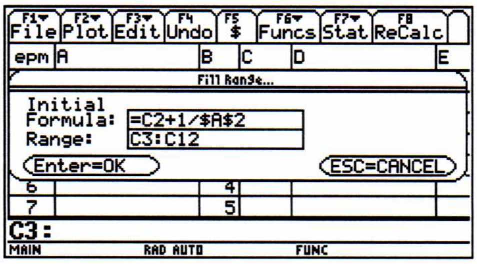
La colonne B est ainsi complétée de façon automatique

Compléter la colonne C

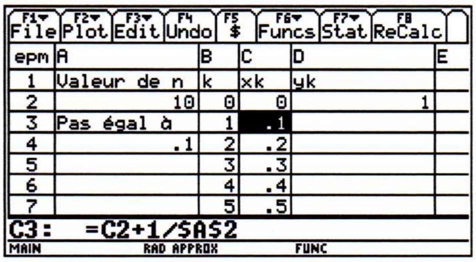


Se placer en C3, puis:

F3 ⊙ ⊙ ENTER

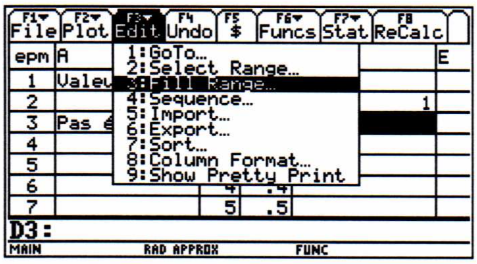


Saisir la formule, puis ENTER ENTER



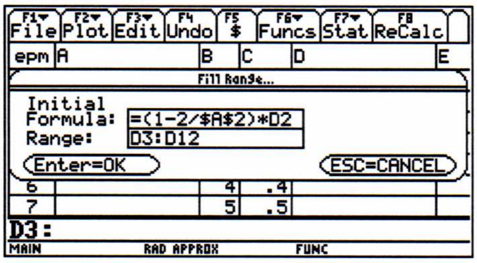
La colonne C est ainsi complétée de façon automatique

Compléter la colonne D

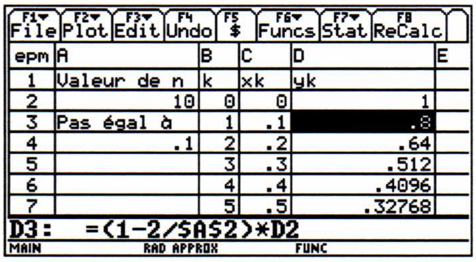


Se placer en D3, puis:

F3 ⊙ ⊙ ENTER



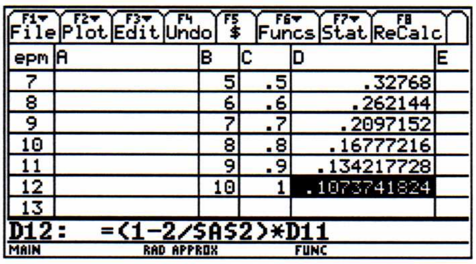
Saisir la formule, puis ENTER ENTER



La colonne D est ainsi complétée de façon automatique

3. <u>En déduire une valeur approchée de f(1)</u>

- On lit directement dans la cellule D12 une valeur approchée de f(1) , c'est-à-dire: $\boxed{f(1) \approx 0{,}107374}$
- La valeur de n se modifie dans la cellule A2



4. Réitérer la méthode dans les cas n=20 puis n=30 et donner les valeurs approchées de f(1) ainsi obtenues

n=20 modifié en A2

	A	B	C	D
1	Valeur de n égale à	k	xk	yk
2	20	0	0	1
3	Pas égal à	1	0,05	0,9
4	0,05	2	0,1	0,81
5		3	0,15	0,729
6		4	0,2	0,6561
7		5	0,25	0,59049
8		6	0,3	0,531441
9		7	0,35	0,4782969
10		8	0,4	0,43046721
11		9	0,45	0,387420489
12		10	0,5	0,34867844
13		11	0,55	0,313810596
14		12	0,6	0,282429536
15		13	0,65	0,254186583
16		14	0,7	0,228767925
17		15	0,75	0,205891132
18		16	0,8	0,185302019
19		17	0,85	0,166771817
20		18	0,9	0,150094635
21		19	0,95	0,135085172
22		20	1	0,121576655

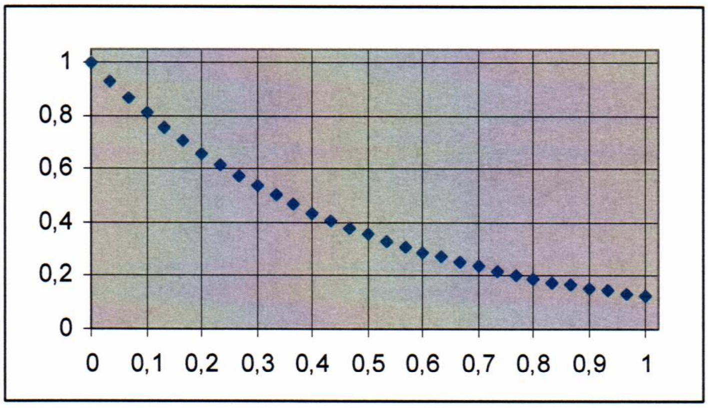
n=30 modifié en A2

	A	B	C	D
1	Valeur de n égale à	k	xk	yk
2	30	0	0	1
3	Pas égal à	1	0,033333333	0,933333333
4	0,033333333	2	0,066666667	0,871111111
5		3	0,1	0,813037037
6		4	0,133333333	0,758834568
7		5	0,166666667	0,708245597
8		6	0,2	0,661029224
9		7	0,233333333	0,616960609
10		8	0,266666667	0,575829901
11		9	0,3	0,537441241
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23		21	0,7	0,234840128
24		22	0,733333333	0,21918412
25		23	0,766666667	0,204571845
26		24	0,8	0,190933722
27		25	0,833333333	0,178204807
28		26	0,866666667	0,166324487
29		27	0,9	0,155236188
30		28	0,933333333	0,144887109
31		29	0,966666667	0,135227968
32		30	1	0,12621277

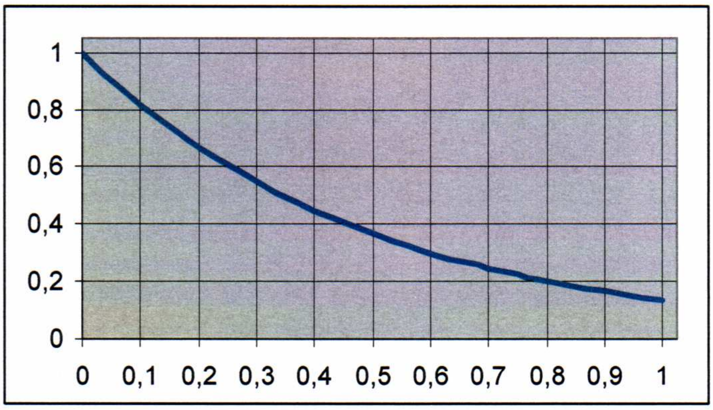
Valeur de n modifiée dans la cellule A2 du tableur égale à:	n=10	n=20	n=30	Valeur approchée de exp(−2x) obtenue à la calculatrice pour x=1
Valeur approchée de y_n lue dans la cellule correspondant à k=n	f(1)≈ 0,107374	f(1)≈ 0,121577	f(1)≈ 0,126213	0,135335

5. A l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite des points M_k obtenue à la question 4., dans le cas où n est égal à 30, ainsi que la fonction solution

Nuage des points $M_k(x_k;y_k)$ dans le cas où n=30



Fonction solution $f(x)=\exp(-2x)$ sur l'intervalle [0;1]



♦ Conclusion: Pour plus de précision, et en utilisant cette méthode, il faut un pas d'échantillonnage 1/n plus petit

Synthèse:

♦ Au tout début de l'énoncé, on nous demande d'admettre que l'équation différentielle $y'=-2y$, c'est-à-dire aussi l'équation différentielle $f'(x)=-2f(x)$, admet pour solution la fonction $f(x)=\exp(-2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ avec comme condition initiale $f(0)=1$

♦ Au final, on veut considérer x=1 et ainsi comparer la valeur exacte de $f(1)=\exp(-2)$ avec la valeur de f(1) obtenue au moyen de la méthode d'Euler pour un pas de $1/n$ c'est-à-dire $1/10$, puis $1/20$ et enfin $1/30$