

Epreuve Pratique de Mathématiques

Sujet 044: Somme de termes d'une suite

Remarque personnelle de l'enseignant:

Il est sans aucun doute judicieux de survoler rapidement l'ensemble du sujet et d'effectuer quelques calculs au moyen de votre machine, ceci afin d'avoir dès le début une idée du résultat final attendu. On confirmera ainsi les résultats avant même d'appeler l'examineur pour vérifications et validation du travail.

$\sum_{k=0}^n (k^3) \rightarrow s(n)$	Done	Hypothèses données en énoncé
$\sum_{k=0}^n k + v(n)$	Done	
$v(n)$	$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$	Question 1.
$s(30)$	216225	Question 2.
$(v(n))^2$	$\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$	
$(v(n))^2 _{n=30}$	216225	Question 3.
$s(n)$	$\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$	Question 4.

1. Donner la somme V_n des $n+1$ premiers termes de la suite des entiers naturels soit $V_n=0+1+\dots+n$

- Chacun des entiers naturels de l'ensemble \mathbb{N} peut être considéré comme étant l'un des termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 ; la somme considérée s'écrit alors:

$$V_n = 0 + 1 + \dots + n = \frac{1}{2} \times (n - 0 + 1) \times (0 + n) \quad \text{c'est-à-dire finalement} \quad \boxed{V_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de S_n pour n allant de 1 à 30

- On commence par remplir la **colonne A** des entiers naturels de 0 à 30. Pour cela, il faut écrire 0 dans la cellule A2, puis en A3 copier la formule $=A2+1$ qui sera ensuite recopiée vers le bas jusqu'à la cellule A32.
- On peut compléter la **colonne B** donnant V_n en écrivant en B2 la formule $=SOMME(\$A\$2:A2)$ avec recopie.
- Pour la **colonne C**, on écrit en C2 la formule $=A2^3$ avec toujours une recopie vers le bas jusqu'en C32.
- Enfin, pour la **colonne D**, on peut écrire dans la cellule D2 la formule $=SOMME(\$C\$2:C2)$ avant d'effectuer une recopie vers le bas jusqu'à la cellule D32. On lit alors $S_{30} = 216225$ directement dans la cellule D32.

	A	B	C	D
1	n	V_n	n^3	S_n
2	0	0	0	0
3	1	1	1	1
4	2	3	8	9
5	3	6	27	36
6	4	10	64	100
7	5	15	125	225
8	6	21	216	441
9	7	28	343	784
10	8	36	512	1296
11	9	45	729	2025
12	10	55	1000	3025
13	11	66	1331	4356
14	12	78	1728	6084
15	13	91	2197	8281
16	14	105	2744	11025

17	15	120	3375	14400
18	16	136	4096	18496
19	17	153	4913	23409
20	18	171	5832	29241
21	19	190	6859	36100
22	20	210	8000	44100
23	21	231	9261	53361
24	22	253	10648	64009
25	23	276	12167	76176
26	24	300	13824	90000
27	25	325	15625	105625
28	26	351	17576	123201
29	27	378	19683	142884
30	28	406	21952	164836
31	29	435	24389	189225
32	30	465	27000	216225

3. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de $(V_n)^2$ dans les mêmes cas particuliers. Que constate-t-on ?

- ◆ Pour la **colonne E**, on note dans la cellule **E2** la formule $=B2^2$, puis on effectue une recopie du contenu de cette cellule vers le bas jusqu'à la cellule E32.

E2		fx =B2^2			
	A	B	C	D	E
1	n	V_n	n^3	S_n	$(V_n)^2$
2	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1
4	2	3	8	9	9
5	3	6	27	36	36
6	4	10	64	100	100
7	5	15	125	225	225
8	6	21	216	441	441
9	7	28	343	784	784
10	8	36	512	1296	1296
11	9	45	729	2025	2025
12	10	55	1000	3025	3025
13	11	66	1331	4356	4356
14	12	78	1728	6084	6084
15	13	91	2197	8281	8281
16	14	105	2744	11025	11025
17	15	120	3375	14400	14400
18	16	136	4096	18496	18496
19	17	153	4913	23409	23409
20	18	171	5832	29241	29241
21	19	190	6859	36100	36100
22	20	210	8000	44100	44100
23	21	231	9261	53361	53361
24	22	253	10648	64009	64009
25	23	276	12167	76176	76176
26	24	300	13824	90000	90000
27	25	325	15625	105625	105625
28	26	351	17576	123201	123201
29	27	378	19683	142884	142884
30	28	406	21952	164836	164836
31	29	435	24389	189225	189225
32	30	465	27000	216225	216225

- ◆ On constate aisément par comparaison des cellules D32 et E32 que $S_{30} = (V_{30})^2 = 216225$

4. A partir du constat ci-dessus, conjecturer une formule donnant la valeur de S_n en fonction de n , puis la démontrer. On suggère une démonstration par récurrence

- ◆ A partir du constat fait à la question précédente, on conjecture que $S_n = (V_n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

◆ Remarques personnelles de l'enseignant:

→ La démonstration par récurrence n'est pas au programme de la classe de 1^{ère} S, mais uniquement à celui de la classe de T^{ale} S

→ Afin de vous permettre néanmoins de réaliser l'ensemble du sujet de cette EPM, le cours et la démonstration attendue sont présentés ci-après

◆ Cours:

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé

si $P(n_0)$ est vraie

Initialisation de la proposition $P(n)$ à partir de l'entier n_0

et si pour tout entier $n \geq n_0$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Vérification du caractère héréditaire de la proposition $P(n)$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

La proposition $P(n)$ a été démontrée par récurrence pour $n \geq n_0$

◆ On considère la somme S_n des cubes des n premiers entiers, c'est-à-dire $S_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$ on a: $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Etape ①: Etablir la proposition $P(n)$

Appelons $P(n)$ la proposition: $\ll S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg$

Etape ②: Initialiser la proposition à n_0

On a d'une part $S_0 = 0^3 = 0$

et d'autre part, pour $n=0$: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$

Autrement dit, la proposition $P(n)$ est vraie dans le cas $n=0$ (Remarque: ici, on a donc $n_0=0$)

Etape ③: Vérifier le caractère héréditaire de la proposition $P(n)$, c'est-à-dire le passage de n à $n+1$

Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un entier particulier $n \geq 0$, c'est-à-dire que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Alors, par définition, on a $S_{n+1} = \underbrace{0^3 + 1^3 + \dots + n^3}_{S_n} + (n+1)^3$ car S_n représente la somme des cubes

donc $S_{n+1} = \underbrace{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}_{S_n} + (n+1)^3$ puisque l'on admet la proposition $P(n)$

qui donne en factorisant $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{4} \times [n^2 + 4(n+1)]$

soit aussi $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{4} \times [n^2 + 4n + 4]$ on reconnaît une identité remarquable

d'où l'écriture équivalente $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2$

soit finalement $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2 [(n+1)+1]^2}{4}$. La proposition $P(n+1)$ est donc vraie

Etape ④: Conclusion

On a donc démontré avec $n_0=0$ que $P(n_0)$ est vraie et que pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

On en déduit donc que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ (avec ici $n_0=0$)

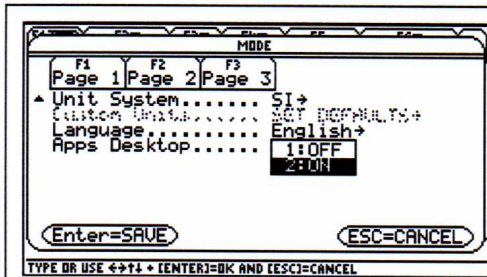
Finalement, on a démontré par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$ on a:

$$\boxed{S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} \text{ c'est-à-dire aussi bien évidemment } \boxed{S_n = (V_n)^2}$$

◆ Exemple: $S_{30} = \frac{30^2(30+1)^2}{4} = \frac{30^2 \times 31^2}{4} = \frac{900 \times 961}{4} = \frac{864900}{4} = \frac{216225 \times 4}{4}$ soit finalement $\boxed{S_{30} = 216225}$

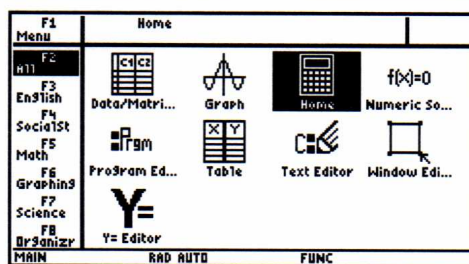
Remarques personnelles de l'enseignant:

- ◆ Dans l'énoncé, il est demandé d'utiliser un tableur, mais le modèle de celui-ci ne sera jamais imposé. En particulier, si vous disposez sur votre calculatrice d'un tableur et que vous y êtes habitué, il vous est tout à fait possible de l'utiliser plutôt que le tableur installé sur ordinateur que vous maîtrisez peut-être moins bien.
- ◆ Pour utiliser le tableur de votre calculatrice, sous réserve bien entendu que celle-ci en soit dotée, veuillez suivre les différentes étapes ci-après:



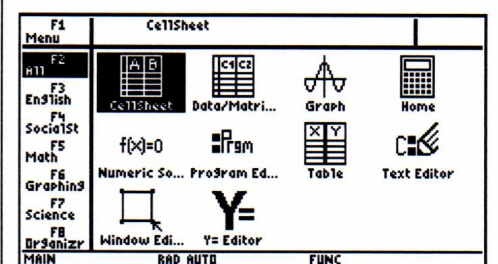
Activer le bureau des applications

ON **MODE** **F3** "Apps ... 2:ON" **ENTER**



Eteindre puis rallumer la calculatrice

ENTER **2nd** **ON** **ON**

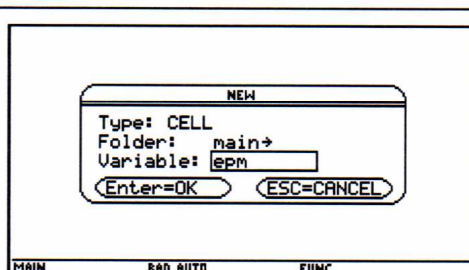


Si le tableur n'est pas installé, le télécharger depuis le site du constructeur, puis charger cette application flash sur votre machine



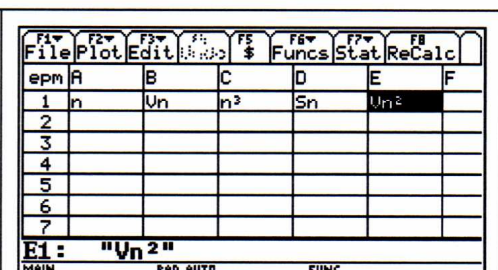
Puis, lancer l'application "CellSheet"

ENTER



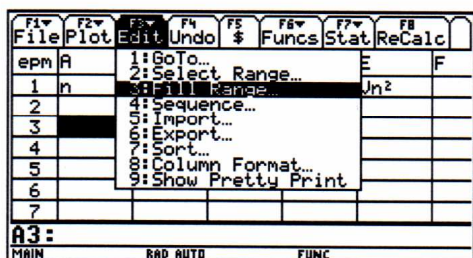
Créer un nouveau fichier "epm"

ENTER **ENTER** **ENTER** **ENTER** **ENTER**



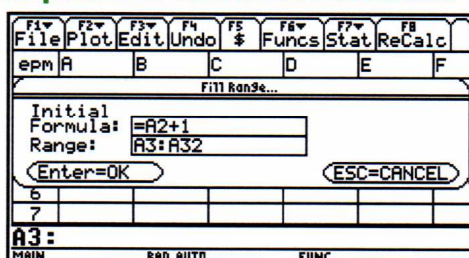
Remplir la feuille de calculs. Par défaut, les nombres sont centrés à droite, et les expressions non algébriques (veillez à les encadrer par des " ") sont centrées à gauche

Compléter la colonne A donnant "n"



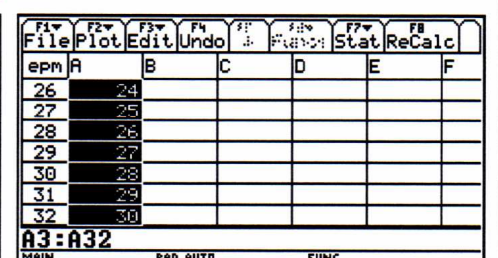
Ecrire 0 en A2, puis se placer en A3. Ensuite, taper successivement:

F3 **ENTER** **ENTER** **ENTER**



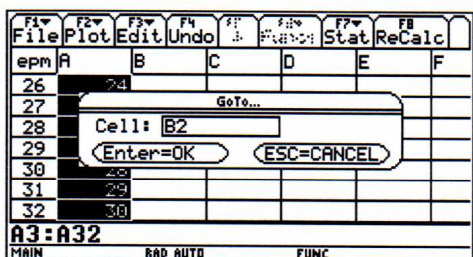
Saisir la formule, puis

ENTER **ENTER**



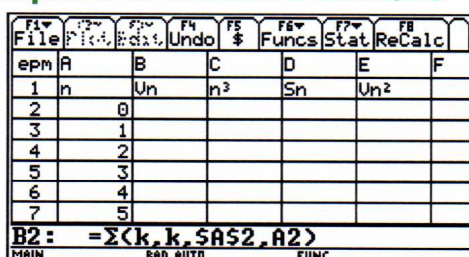
La colonne A est ainsi complétée de façon automatique. Il est conseillé de désactiver le calcul automatique en tapant **F1** **9** **ENTER**

Compléter la colonne B donnant "Vn"

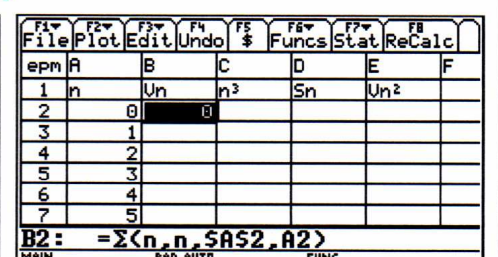


Aller en B2 en tapant:

F3 **1** **B2** **ENTER** **ENTER**



La formule est $= \sum_{k=\$A\$2}^{k=A2} k$ puis **ENTER**



Se replacer en B2, puis copier cette cellule avec **F1** **ENTER** **ENTER** **ENTER** **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
1	n					
2						
3						
4						
5						
6		4				
7		5				

Select Range...

Range: B3:B32

Enter=OK ESC=CANCEL

B2: =Σ(n,n,SA52,A2)

Ensuite, sélectionner les cellules B3 à B32 avec **F3** **2** B3:B32 **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
1: Open...	+O					
2: Save Sheet As...	+N					
3: New...	+N					
4: Cut...	+X					
5: Copy...	+C					
6: Paste...	+I					
7: Paste Special...	+I					
8: Clear Sheet						
9: Format...	+F					
A: About...						
B: Help						

B3: B32

Coller maintenant le contenu de B2: **ENTER** **F1** **6**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
26	24	300				
27	25	325				
28	26	351				
29	27	378				
30	28	406				
31	29	435				
32	30	465				

B3: B32

La colonne B est ainsi complétée de façon automatique

Compléter la colonne C donnant "n³"

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
26	24					
27						
28						
29						
30						
31						
32						

GoTo...

Cell: B2

Enter=OK ESC=CANCEL

A3: A32

Aller en C2 en tapant: **F3** **1** C2 **ENTER** **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
1	n	Un	n ³	Sn	Un ²	
2		0	0			
3		1	1			
4		2	3			
5		3	6			
6		4	10			
7		5	15			

C2: =A2^3

La formule est =A2^3, puis **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
1	n	Un	n ³	Sn	Un ²	
2		0	0			
3		1	1			
4		2	3			
5		3	6			
6		4	10			
7		5	15			

C2: =a2^3

Se replacer en C2, puis copier cette cellule en tapant **F1** suivie de **5**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
1	n					
2						
3						
4						
5						
6		4	10			
7		5	15			

Select Range...

Range: C3:C32

Enter=OK ESC=CANCEL

C2: =a2^3

Ensuite, sélectionner les cellules C3 à C32 avec **F3** **2** C3:C32 **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
1: Open...	+O					
2: Save Sheet As...	+N					
3: New...	+N					
4: Cut...	+X					
5: Copy...	+C					
6: Paste...	+I					
7: Paste Special...	+I					
8: Clear Sheet						
9: Format...	+F					
A: About...						
B: Help						

C3: C32

Coller maintenant le contenu de C2: **ENTER** **F1** **6**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
26	24	300	13824			
27	25	325	15625			
28	26	351	17576			
29	27	378	19683			
30	28	406	21952			
31	29	435	24389			
32	30	465	27000			

C3: C32

La colonne C est ainsi complétée de façon automatique

Remarque: Il était aussi possible de compléter la colonne C autrement:

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
26	24					
27						
28						
29						
30						
31						
32						

GoTo...

Cell: B2

Enter=OK ESC=CANCEL

A3: A32

Aller en C2 en tapant: **F3** **1** C2 **ENTER** **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
Expr:	n^3					
Var:	n					
Low:	0					
High:	30					
Step:	1					
1st Cell:	C2					
Direction:	DOWN					

C2: =0

Saisir la formule comme ci-dessus **F3** **4** ... **ENTER** **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
1	n	Un	n ³	Sn	Un ²	
2		0	0			
3		1	1			
4		2	3			
5		3	6			
6		4	10			
7		5	15			

C2: =0

La colonne C est ainsi complétée de façon automatique

Compléter la colonne D donnant "Sn"

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
27	25	325	15625			
28						
29						
30						
31						
32						
33						

GoTo...

Cell: D2

Enter=OK ESC=CANCEL

C27: 15625

Aller en D2 en tapant: **F3** **1** D2 **ENTER** **ENTER**

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
1	n	Un	n ³	Sn	Un ²	
2		0	0			
3		1	1			
4		2	3			
5		3	6			
6		4	10			
7		5	15			

D2: =Σ(k^3, k, SA52, A2)

La formule est: $= \sum_{k=SA52}^{k=A2} k^3$, puis taper **ENTER** pour valider le calcul

File	Plot	Edit	Undo	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F
1	n	Un	n ³	Sn	Un ²	
2		0	0			
3		1	1			
4		2	3			
5		3	6			
6		4	10			
7		5	15			

D2: =Σ(k^3, k, SA52, A2)

Se replacer en D2, puis copier cette cellule avec **F1** **5** **ENTER**

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F	
1	n						
2							
3							
4							
5							
6	4	10	64				
7	5	15	125				

Range: D3:D32
Enter=OK ESC=CANCEL

D2: =Σ(k^3, k, SA52, A2)

Ensuite, sélectionner les cellules D3 à D32 avec [F3] [2] D3:D32 [ENTER]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
1: Open...				D	E	F	
2: Save Sheet As...				13824			
3: New...				15625	185625		
4: Cut				17576	123201		
5: Copy				19683	142884		
6: Paste				21952	164836		
7: Paste Special...				24389	189225		
8: Clear Sheet				27000	216225		
9: Format...							
A: About...							
B: Help							

D3:D32

Coller maintenant le contenu de D2: [ENTER] [F1] [6]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F	
26	24	300	13824	90000			
27	25	325	15625	105625			
28	26	351	17576	123201			
29	27	378	19683	142884			
30	28	406	21952	164836			
31	29	435	24389	189225			
32	30	465	27000	216225			

D3:D32

La colonne D est ainsi complétée de façon automatique. Pour modifier la largeur des colonnes, faire: [F3] [8]

Compléter la colonne E donnant "Vn²"

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F	
26	24	300	13824	90000			
27							
28							
29							
30	40	406	21952	164836			
31	29	435	24389	189225			
32	30	465	27000	216225			

Cell: E2
Enter=OK ESC=CANCEL

D3:D32

Aller en E2 en tapant:

[F3] [1] E2 [ENTER] [ENTER]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F	
1	n	Un	n ²	Sn	Un ²		
2	0	0	0	0	0		
3	1	1	1	1	1		
4	2	3	8	9			
5	3	6	27	36			
6	4	10	64	100			
7	5	15	125	225			

E2: =B2^2

La formule est =B2^2, puis [ENTER]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
1: Open...				D	E	F	
2: Save Sheet As...				Sn	Un ²		
3: New...				0	0	0	
4: Cut				1	1		
5: Copy				8	9		
6: Paste				27	36		
7: Paste Special...				64	100		
8: Clear Sheet				125	225		
9: Format...							
A: About...							
B: Help							

E2: =B2^2

Se replacer en E2, puis copier cette cellule en tapant [F1] suivie de [5]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F	
1	n						
2							
3							
4							
5							
6	4	10	64	100			
7	5	15	125	225			

Range: E3:E32
Enter=OK ESC=CANCEL

E2: =B2^2

Ensuite, sélectionner les cellules E3 à E32 avec [F3] [2] E3:E32 [ENTER]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
1: Open...				D	E	F	
2: Save Sheet As...				13824	90000		
3: New...				15625	185625		
4: Cut				17576	123201		
5: Copy				19683	142884		
6: Paste				21952	164836		
7: Paste Special...				24389	189225		
8: Clear Sheet				27000	216225		
9: Format...							
A: About...							
B: Help							

E3:E32

Coller maintenant le contenu de E2: [ENTER] [F1] [6]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F	
26	24	300	13824	90000	90000		
27	25	325	15625	105625	105625		
28	26	351	17576	123201	123201		
29	27	378	19683	142884	142884		
30	28	406	21952	164836	164836		
31	29	435	24389	189225	189225		
32	30	465	27000	216225	216225		

E3:E32

La colonne E est ainsi complétée de façon automatique

On arrive finalement, au moyen d'une calculatrice disposant d'un tableur, à un résultat identique à celui qui a été obtenu en utilisant un tableur sur ordinateur:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
epm	A	B	C	D	E	F	
1	n	Un	n ²	Sn	Un ²		
2	0	0	0	0	0		
3	1	1	1	1	1		
4	2	3	8	9	9		
5	3	6	27	36	36		
6	4	10	64	100	100		
7	5	15	125	225	225		

Barème type: Vous pouvez à présent, si vous le souhaitez, évaluer objectivement votre travail sur cette EPM

- : 0,5 pt Expression de la somme Vn des n+1 premiers entiers naturels
- : 0,5 pt Utilisation du tableur ou de la calculatrice, calcul de la valeur de Sn pour n allant de 1 à 30
0,5 pt Formule donnant Vn qu'il faut saisir sur tableur ou calculatrice
- : 0,5 pt Utilisation du tableur ou de la calculatrice, calcul de la valeur de (Vn)² pour n allant de 1 à 30
0,5 pt Constatation de l'égalité entre les colonnes Sn et (Vn)² sur tableur ou calculatrice
- : 0,5 pt Conjecture de la formule donnant la valeur de Sn en fonction de n
1 pt Démonstration par récurrence