**Chap 7 – Produit scalaire**

1. **Rappels sur les vecteurs** 
   1. Coordonnées d’un point – coordonnées d’un vecteur

Le plan est muni d’un repère orthonormé (*O*,,).

Les 3 énoncés ci-dessous sont équivalents :

* *A* a pour coordonnées dans le repère (*O*,,)
* a pour coordonnées dans la base
* =*x*+*y*

On dit que *x* est le projeté orthogonal de sur l’axe

De même *y* est le projeté orthogonal de sur l’axe .

Plus généralement, si *A* et *B* sont 2 points quelconques du plan :

.

Si est un vecteur et si *A* est un point, alors il existe un point unique *B* tel que =.

* 1. Norme d’un vecteur – Distance entre 2 points

La longueur d’un vecteur est appelée **norme** du vecteur et se note

Si *A* et *B* sont 2 points quelconques, alors :

De même, si est un vecteur de coordonnées , alors

* 1. Relation de Chasles

Si *A*, *B* et *C* sont 3 points quelconques du plan alors

1. **Produit scalaire de 2 vecteurs**
   1. Définition

Si et sont 2 vecteurs quelconques, on appelle produit scalaire des 2 vecteurs et le nombre réel :

Exemple : si et alors .=10+6=16

Remarque : on écrit .=

* 1. Premières propriétés
* .=+, autrement dit : =
* si = ou = alors .=0, *mais attention la réciproque est fausse !*

Par exemple si = et =, alors .=0

* Si et sont colinéaires, c’est-à-dire si =*k* ,

alors .=*x*.*kx*+*y*.*ky*=*k*

donc .*k*=

Conséquences :

* + si et sont colinéaires de même sens (*k*>0), alors .>0

Dans ce cas : .=×

* + si et sont colinéaires de sens contraires (*k*<0), alors .<0

Dans ce cas : .=-×

* + si *A*, *B* et *C* sont alignés alors

si et sont de même sens, alors .=*AB*×*AC*

sinon .=-*AB*×*AC*

* Si , et sont 3 vecteurs alors .=.+.
  1. Autres définitions du produit scalaire

Nous admettrons que le produit scalaire de 2 vecteurs peut être défini ainsi :

En effet, on a : =.=+2.+

Donc : =+2.+

Donc : −−=2.

On en déduit : .=

* si ý et si ý, alors

En particulier, si *A*, *B* et *C* sont 3 points distincts, .=*AB*×*AC*×cos

* si ý, alors où ’ est le projeté orthogonal de sur .

Exemples de projections orthogonales d’un vecteur sur un vecteur :



En particulier, si *A*, *B* et *C* sont 3 points distincts et si *H* est le projeté de *C* sur (*AB*) :

.=.



Premier cas : *H*☻[*AB*] Deuxième cas : *H*∉[*AB*]

1. **Utilisation du produit scalaire**
   1. Orthogonalité

*Définition* : Deux vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si :

* + - l’un des 2 vecteurs est nul OU
    - ý et ý et =+*kπ* (*k***☻**Z)

On écrit : ┴

*Théorème* : Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Autrement dit : ┴ ñ .=0

*Remarques* : On dit qu’un repère (O,,) est orthonormé direct lorsque

De même (O,,) est un repère orthonormé indirect si

*Conséquences :*

* Si est un vecteur quelconque, alors le vecteur est orthogonal à .
* si est orthogonal à alors, est orthogonal à *k* où *k* est un réel quelconque.



* 1. Théorème d’Al-Kashi

Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore. Il s’applique à tous les triangles et non pas seulement aux triangles rectangles.

On considère un triangle *ABC*. On note *a*, *b*, *c* les longueurs des côtés

On note , et les angles intérieurs du triangle.

*Théorème* : =+−2*bc*cos

On en déduit, par permutation circulaire des 3 points : =+−2*ac*cos

=+−2*ab*cos

si le triangle *ABC* est rectangle en *A*, alors

cos=cos=0

et on retrouve la formule de Pythagore : =+

* 1. Théorème des sinus

En reprenant les mêmes notations que ci-dessus (triangle *ABC*, de côtés *a*=*BC*, *b*=*AC* et *c*=*AB*), on peut écrire :

*S*=*bc*=*ac*=*ab* où *S* est l'aire du triangle *ABC*

On en déduit la formule : ==