**Exercices sur le produit scalaire**

**Exercice 3 page 233**

 On considère 3 points quelconques non alignés du plan *A*, *B* et *C*.

Placer les points *E* et *F* tels que : =5−4 =2+

****

**Exercice 6 page 233**

Écrire plus simplement les vecteurs définis par :

1. =+
2. =++
3. =−+
4. =−+−
5. =−++−

**Solution :**

1. =+=
2. ==
3. =++=++=
4. =+++=+=+=
5. =++++=+

**Exercice préparatoire à l’orthogonalité**

On considère les points *A* et *B* dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l’équation réduite de la droite (*AB*) et tracer la droite (*AB*).

L’équation de (*AB*) est de la forme : *y*=*ax*+*b*

Cette équation est vérifiée par les points *A* et *B*, donc :

De la première équation, on peut déduire : *b*=1−2*a*

On remplace, dans la seconde équation, *b* par 1−2*a* : 3=3*a*+(1−2*a*)

 3=*a*+1

On en déduit : puis

L’équation de la droite (*AB*) est donc :

1. Soit *M* un point quelconque. Calculer, en fonction de *x* et de *y*, le produit scalaire ..

, donc

, donc

On en déduit : .=1×(*x*−2)+2×(*y*−1) Donc

1. Quel est l’ensemble des points *M* tels que .=0. Tracer cet ensemble. Que remarque-t-on ?

L’équation .=0 équivaut à *x*+2*y*−4=0, soit *y*=-*x*+2.

On reconnaît l’équation réduite d’une droite. Pour la tracer, on choisit 2 valeurs de *x* :

si *x*=0, alors *y*=2; si *x*=4 alors *y*=0.

Donc la droite d’équation *y*=-*x*+2 passe par les points de coordonnées et

**Exercice 18 page 235**

Calculer si =5, =50 et =

On sait que : =××cos

Donc : 50=5××cos

Donc : =

Donc : =

Donc :

**Exercice 20 page 235**

Calculer la valeur approchée, en degrés, arrondie à , de l’angle :

=5 =8 et =20

On utilise la formule : =××cos

On en déduit que : cos=

donc : cos==

donc : ou

**Exercice 26 page 235**

On donne 3 points *A*, *B* et *C*. Dans chacun des cas suivants, calculer ., cos et l’angle

1. *A*, *B* et *C*
2. *A*, *B* et *C*

**Solution :**

1. . Donc . De même .

Donc :

On a, par ailleurs : *AB*===2 et *AC*===2

et on sait que : .=××cos

Donc :

On en déduit que :

1. On a : et . Donc

Par ailleurs : *AB*==3 et *AC*==

Donc :

Donc : ou

**Exercice 29 page 235-236**

On donne les points *A* et *B*. Soit *I* le milieu de [*AB*] et *M* un point variable d’abscisse *x* sur l’axe des abscisses.

1. Calculer en fonction de *x* le produit scalaire ..
2. Déterminer le réel *x* pour que l’angle soit un angle droit.
3. Pour chacune des valeurs de *x* trouvées au 2. vérifier, en calculant la distance *IM* que *M* appartinet au cercle de diamètre [*AB*].

**Solution :**

1. Le point *M* a pour coordonnées . Donc et .

Donc : .=(1−*x*)(4−*x*)+(1)(2)=4−*x*−4*x*++2

Donc :

1. Déterminer le réel *x* pour que l’angle soit un angle droit.

On sait que est un angle droit si et seulement si .=0

On en déduit que le réel *x* est solution de l’équation .=0 ou encore −5*x*+6=0

Le discriminant de cette équation est *Δ*=1. Il y a deux solutions : ==2 et ==3.

1. Pour chacune des valeurs de *x* trouvées au 2. vérifier, en calculant la distance *IM* que *M* appartient au cercle de diamètre [*AB*].

Les coordonnées du point *I* sont , soit *I*. Donc

On en déduit que : *IM*===

Donc, si *x*=2, alors *IM*== et si *x*=3 alors *IM*==

Par ailleurs on obtient également *IA*=*IB*=

Donc le point *M* appartient bien au cercle de diamètre [*AB*] (et de centre *I*).

**Exercice 30 page 236**

Dans le plan muni d’un repère orthonormé, on considère les points *A*, *B* et *C*.

1. Placer les points *A*, *B* et *C*.
2. Montrer que le triangle *ABC* est rectangle
3. Déterminer les mesures en degrés des angles aigus du triangle *ABC*.

**Solution :**

1. Figure



1. Montrer que le triangle *ABC* est rectangle.

D’après la figure, on peut conjecturer que le triangle est rectangle en *A*. Démontrons-le en calculant le produit scalaire ..

 et .

On a alors .=-20+20=0.

Donc ┴.

Donc le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

1. Déterminer les mesures en degrés des angles aigus du triangle *ABC*.

On a : .=*BA*×*BC*×cos.

Donc : cos=

Or on a : et .

Donc .=24+5=29 et *BA*== et *BC*==

Donc cos=====

Donc et, par complémentation :

**Exercice 31 page 236**

Dans le plan muni d’un repère orthonormé, on considère les points *A*, *B* et *C*.

1. Placer les points *A*, *B* et *C*.
2. Déterminer les coordonées du point *D* sachant que *ABCD* est un parallélogramme.
3. Déterminer en degrés les mesures des angles et du parallélogramme *ABCD*.

**Solution :**

1. Figure
2. On doit avoir : =

Donc si on pose *D* : =

soit : donc

Donc le point *D* a pour coordonnées .

1. Déterminer en degrés les mesures des angles et du parallélogramme *ABCD*.

On a : et

Donc .=5−32=-27

et : *AD*==

et : *AB*==

Donc cos==

Donc =Arccosó121,53°

De même on obtient ó58,47°

Remarque : dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux et la somme des angles est égale à 360°. Donc la somme de 2 angles consécutifs est égale à 180°

**Exercice hors livre**

On donne un triangle *ABC* de hauteur *CH* telle que *AH*=2 et *HB*=4.

On suppose de plus que *H☻*[*AB*]

Calculer les produits scalaires ., .,

. et ..

**Solution**

* et sont colinéaires et de même sens.

Donc .=*AB*×*AH*=6×2=12

* Le projeté de *C* sur (*AB*) est le point *H*.

Donc .==12

* De même .==0
* et sont colinéaires de sens contraire.

Donc .=-*HB*×*HA*=-8

**Exercice 40 page 237**

On considère le triangle *ABC* tel que *AC*=24 cm, *BC*=28 cm et *AB*=40 cm.

1. Faire un dessin à l’échelle 1/4.
2. Calculer la mesure en degrés de l’angle du triangle *ABC*. Arrondir à .
3. On admet pour la suite que =100,3°. Calculer l’aire *S* du triangle *ABC*. Arrondir à .
4. Pour la suite, on admet que *S*=330,6 cm2. Calculer l’aire *S*′ du triangle dessiné à la première question.
5. On appelle *H* le pied de la hauteur issue du point *C*. Placer *H* sur le dessin.

Donner l’expression de l’aire du triangle *ABC* en fonction de CH. En déduire CH.

1. Calculer la mesure en degrés de l’angle . Arrondir à .
2. En utilisant un résultat admis à la question 3, et le résultat obtenu à la question 6, calculer une valeur approchée de l’angle .

**Solution**

1. Faire une figure à l’échelle
2. Calculer une mesure en degrés de l’angle du triangle *ACB*.

D’après le théorème d’Al-Kashi :

=+−2*ab*cos,

donc cos=

Or, on sait que .

Donc cos==-.

Donc =Arccos, soit

1. Calculer l’aire *S* du triangle *ABC*.

L’aire d’un triangle *ABC* est donnée par la formule : *S*=*ab*sin

Or nous savons que cos=-.

Donc =1−= 1−=

Donc sin==

(On pouvait avoir une valeur approchée de sin en posant sinósin(100,3°)

Donc

1. On en déduit que l’aire *S*′ du triangle dessiné à l’échelle est
2. On appelle *H* le pied de la hauteur issue du point C.

Donner l’aire du triangle *ABC* en fonction de CH. En déduire CH.

On a : (*ABC*)=

Donc : =12

Donc :

1. Calculer la mesure en degrés de l’angle . Arrondir à

On sait que, dans le triangle rectangle *ACH*, sin==

On en déduit : sin==. Donc

1. En utilisant le résultat admis à la question 3 et le résultat obtenu à la question 6, une valeur approchée de l’angle .

On sait que la somme des angles d’un triangle est égale à 180°

or ó43,5° et ó100,3°.

Donc, par soustraction :

Remarque : un calcul direct donne cos=. Donc =Arccosó36,18228722…

**Exercice 42 page 237**

On considère le quadrilatère *ABCD* où : *AB*=10 cm,

=90°, =30°, =30° et =40°.

1. Calculer ***AD*** (erreur dans l’énoncé) et *BD* : valeurs exactes puis valeurs approchées au millimètre.
2. Calculer *AC* et *BC* (valeurs exactes puis approchées au millimètre)
3. En déduire *DC* : préciser la formule utilisée et donner la valeur arrondie au milimètre.
4. Calculer l’aire A du quadrilatère *ABCD*. Préciser la méthode utilisée et donner la valeur approchée arrondie au mm2 près.

**Solution**

1. Calculer ***AD*** (erreur dans l’énoncé) et *BD* : valeurs exactes puis valeurs approchées au millimètre.

=tan30°. Donc

=cos30°. Donc

1. Calculer *AC* et *BC* (valeurs exactes puis approchées au millimètre)

Dans le triangle *ABC*, on a : =

Or =30°+40°=70° et =180°−30°−70°=80°

Donc =. Donc

De même on a : =

donc =. Donc

1. En déduire *DC* : préciser la formule utilisée et donner la valeur arrondie au milimètre.

Avec la formule d’Al Kashi liée au triangle *ACD*, on peut écrire :

=+−2*AD*×*AC*×cos

=+−2×××cos60°

=+100−×

=+100−

*DC*=



1. Calculer l'aire A du quadrilatère *ABCD* : préciser la méthode utilisée et donner la valeur approchée au mm2.

On peut écrire : *A*=(*ACD*)+(*ABC*)

Or on a : (*ACD*)=*AC*×*AD*×sin=××sin60°=25

De même : (*ABC*)=*AB*×*AC*×sin=×10××sin30°=25

Donc :

**n° 57 page 232 (livre Hachette 1STI-STL)**

Sur le dessin ci-contre, *ABCD* est un carré et *AIB* est un triangle équilatéral.

1. On se place dans le repère orthonormé .
2. Donner les coordonnées des points *A*, *B*, *C* et *D*.

On a : *A*, *B*, *C* et *D*

1. On appelle *J* le milieu de [*AB*]. Calculer *IJ*. En déduire les coordonnées de *I*.

Dans le triangle rectangle *AIJ*, on a : +=

Donc : +=

Donc : 0,25+=1

Donc : =0,75=. Donc

Les coordonnées de *I* sont donc

1. Calculer le produit scalaire ..

D’après ce qui précède, on a : et

Donc : .=+=−+=1−

1. a) Calculer la distance *ID*

Nous savons que . Donc =+=+1−+=2−

On en déduit :

b) En écrivant le produit scalaire . d’une autre façon, déterminer l’angle .

.=*IA*×*ID*×cos. Donc cos=

 cos===

Donc :

c) En déduire l’angle .

Le triangle *AID* est isocèle (*AI*=*AD*=1).

Donc ses angles de base sont égaux : ==75°

Donc : =90°−=15°.

Comme le triangle *CDI* est isocèle, on peut dire que



**n° 48 page 230 (Hachette)**

Soit *ABCD* un trapèze rectangle en *A* tel que *AD*=2 et *AB*=5. L’objectif est de déterminer s’il existe une ou plusieurs positions de *C* tel que (*AC*) soit perpendiculaire à (*BC*).

On se place dans le repère orthonormé tel que = et *J* est le milieu de [*AD*].

On note *x* l’abscisse de *C*.

1. Calculer en fonction de *x* le produit scalaire ..

On a : *A*, *B*, *C*. Donc et . Donc

1. En déduire la ou les valeurs de *x* telles que (*AC*)┴(*BC*).

(*AC*)┴(*BC*) ñ .=0 ñ -+5*x*−4=0 ñ

***Exercice hors livre***

*ABCD* est un trapèze rectangle.

*H* et *K* sont les projetés orthogonaux respectifs de *A* et *C* sur (*BD*).

1. Calculer la longueur *BD*.

2. *a)* Calculer le produit scalaire .

 *b)* Démontrer que : .=.

 *c)* En déduire la longueur *HK*.

1. Dans le triangle rectangle *ABD*, on a : =+=+=73

Donc

1. a) Calcul du produit scalaire .

Si on considère le repère tel que = et =, alors c’est un repère orthonormé.

Dans ce repère, on a : *A*, *B*, *C* et *D*

Donc et

Donc le produit scalaire . est donné par : .=(4)(-8)+(3)(3)=-32+9=-23

Autre méthode : .=., d’après la relation de Chasles

 .=.+.+.+.

 .=0+−*DC*×*BA*+0

En effet, ┴ et ┴ donc .=.=0

Par ailleurs les vecteurs et sont colinéaires de sens contraire, donc .=-*DC*×*BA*

b) Démontrer que .=..

En effet, le projeté orthogonal de *A* sur (*BD*) est le point *H* et celui de *C* est le point *K*.

On peut donc remplacer le vecteur par son projeté sur (*BD*)

On a donc bien .=..

c) En déduire la longueur *HK*.

 Les vecteurs et sont colinéaires de sens contraire. Donc .=-*HK*×*BD*

On en déduit que .=-*HK*×*BD*=-*HK*×

Par ailleurs, d’après la question 2a), .=-23

Donc -*HK*×=-23

Donc

**n° 34 page 236 *Algorithmique : voir le site http://www.dcode.fr/triangle***

 On donne : *a*=125; =54°; =65°

 On déduit :

 ==. Donc

 et

**n° 35 page 236**

 On donne : *a*=512; *b*=426; =48,5°

 On déduit : = donc sin==

 donc

 ++=180° donc

 = donc

**n° 36 page 236**

On donne : *a*=6,34; *b*=7,30; *c*=9,98

On déduit : =+−2*bc*cos donc cos==ó0,77

 donc

 =+−2*ac*cos donc cos==ó0,68

 donc

**n° 37 page 236**

On donne : *b*=215; *c*=150; =42°

On déduit : = donc sin==

 donc

 = donc

**n° 38 page 236**

 On donne : =50,29°; =88,36°; *a*=48,17

 On déduit :

 = donc

 = donc

**n° 39 page 236**

On donne : =57,65°; *a*=125,34; *c*=56,91

On déduit : = donc sin==

 donc

 = donc

**n° 52 page 239**

On a, dans le triangle *CDS* :

 =180°−−=180°−79,70°−63,65°=36,65°

 ==.

 Donc : *CS*==ó60,05

 et : *DS*==ó65,93

De même, dans le triangle *ABS*, on a :

==

Donc : *AS*==ó123,66

et : *BS*==ó127,80

On en déduit :

 et :

**Algorithmique.**

Écrire un algorithme qui demande d’entrer les coordonnées de 3 points *A*, *B* et *C* et qui affiche en sortie les longueurs des 3 côtés du triangle *ABC* ainsi que les angles , et . Traduire ensuite cet algorithme pour une calculatrice.

1. Écriture de l’algorithme :

 Début

 Lire , , , , et .

 *AB* prend la valeur

 *AC* prend la valeur

 *BC* prend la valeur

 prend la valeur + // =.

 prend la valeur + // =.

 prend la valeur + // =.

 prend la valeur

 prend la valeur

 prend la valeur

 Afficher *AB*, *AC*, *BC*, , et .

 Fin.

1. Traduction de l’algorithme pour une calculatrice Casio :

Pour limiter le nombre de variables, nous pouvons choisir de saisir les coordonnées des points *A*, *B* et *C* sous leur forme complexe. Ainsi, les variables *A*, *B* et *C* contiendront les affixes complexes de ces points.

Or on sait que *AB*=. Autrement dit, puisque =*B* et que =*A*, *AB*=

On pourra stocker la distance *AB* dans la variable *D* : Abs(*B*−*A*)→*D*

De même, la variable *E* recevra la distance *AC* : Abs(*C*−*A*)→*E*

Le vecteur a pour affixe −, autrement dit *B*−*A*

On peut donc dire que les coordonnées de sont les parties réelle et imaginaire de *B*−*A*.

Le module d’un nombre complexe *z* se note |*z*| en mathématique et Abs (z) en langage Casio.

La partie réelle d’un nombre complexe *z* se note ReP (z) dans le langage Casio.

La partie imaginaire d’un nombre complexe *z* se note ImP (z) dans le langage Casio.

Pour calculer le produit scalaire . de 2 vecteurs d’affixes et on écrira donc en langage Casio :

()×()+()×()



**Exercice : Démonstration que les 3 hauteurs d’un triangle sont concourantes.**

On considère un triangle quelconque *ABC*.

On note *I*, *J* et *K* les pieds des hauteurs issues des sommets *A*, *B* et *C*.

On note *H* le point d’intersection des hauteurs (*AI*) et (*BJ*)

1. Démontrer que, pour tout point *M* du plan,

.+.+.=0

(on pourra décomposer en + et en +

1. En appliquant ce résultat au point *H*, démontrer que (*CH*)┴(*AB*).
2. Conclure

**Solution :**

1. .+.+.=.+.+.

 =.+.+.+.+.

 =.+.

 =.+.

 =0

1. On en déduit, en particulier pour le point *H* : .+.+.=0

Or (*HA*)┴(*BC*) et (*HB*)┴(*CA*), donc .=0 et .=0

Donc .=0

Donc (*HC*)┴(*AB*)

1. Les trois hauteurs du triangle *ABC* sont bine concourantes.