**Le flocon de Von Koch**



Le flocon de Von Koch est une figure géométrique qui s’obtient par étape successives.

Au départ, étape 1, on part d’un triangle équilatéral :

Ensuite, chaque côté du triangle est transformé en 4 segments de même longueur :



Ainsi, à l’étape 2, on obtient la figure suivante :

1. Dessiner la figure à l’étape 3, en partant d’un triangle équilatéral de côté 18 cm.
2. On note la longueur du périmètre de la figure à l’étape n. Ainsi =3×18=54
3. Calculer puis
4. On note le nombre de côtés de la figure à l’étape *n*. Ainsi =3. Démontrer que est une suite géométrique de raison 4. En déduire en fonction de *n*.
5. On note la longueur d’un côté de la figure à l’étape *n*. Ainsi =18. Démontrer que est une suite géométrique de raison . En déduire en fonction de *n*.
6. En remarquant que =×, démontrer que =. Quelle est la nature de la suite *u* ?
7. Exprimer en fonction de *n* et calculer successivement , , et . Quelle conjecture peut-on émettre lorsque *n* devient infini ?
8. On note l’aire de la figure à l’étape *n*.
9. Calculer puis . On rappelle que l’aire d’un triangle équilatéral de côté *a* est .
10. Exprimer en fonction de
11. En déduire un algorithme permettant de calculer pour tout entier *n*Ã1. Traduire cet algorithme pour une calculatrice.
12. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite ?

**Solution :**

1. Dessiner la figure (étape 3 ci-contre)
2. Étude du périmètre de la figure
3. On a : =3×18=54 (3 côtés de 18 cm)

 =12×6=78 (12 côtés de 6 cm)

 =48×2=96 (48 côtés de 2 cm)

1. Nombre de côtés de la figure à l’étape *n*

=3 car la figure 1 est un triangle

=4×3=12 car chacun des côtés est remplacé par 4 segments

Plus généralement =4×

Donc la suite est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme =3

On sait que =×

Donc : =×

Donc : =3×

Donc : =×

Finalement :

1. Longueur d’un côté de la figure à l’étape *n*, noté .

Au départ, la longueur du côté est 18 cm. =18.

À chaque étape , cette longueur est divisée par 3.

On peut donc écrire : =×

La suite est donc une suite géométrique de raison 13. On en déduit que =×

Ou encore : =18×

 =3×18×

1. Les côtés de la figure à l’étape *n* sont tous de même longueur . Ils sont au nombre de

Donc le périmètre de la figure, à l’étape *n*, est =×

Donc =×

donc =× car et () sont des suites géométriques de raisons 4 et .

donc =××

donc . La suite est donc une suite géométrique de raison .

1. On en déduit que =×

donc =54× ou encore :

Ainsi :

1. Étude de l’aire à l’étape *n*.
2. Calcul de et de

Dans un triangle équilatéral de côté *a* et de hauteur *h*, on a :

+=

donc : =−

donc : =−

donc : =. On en déduit que :

L’aire du triangle équilatéral est donc égale à : ===.

Donc, pour un triangle équilatéral de côté 18, on a :

À l’étape 2, on ajoute 3 triangles équilatéraux de côté 6 :

1. Exprimer en fonction de

À l’étape (*n*+1), on ajoute triangles équilatéraux de côté

Or on sait que =0,75× et que =54×=18×

Donc l’aire à l’étape (*n*+1) est : =+×

donc : =+0,75××××

Donc : =+60,75×

Finalement :

Vérification avec le calcul de : =+60,75×=81+60,75×=108

1. Algorithme qui calcule pour tout entier *n*Ã1

Début

 lire un entier *n*

 *k* prend la valeur 1

 *v* prend la valeur 81

Tant que *k*<*n*

 *v* prend la valeur *v*+60,75×

 *k* prend la valeur *k*+1

Fin Tant que

 Afficher *v*

Fin

1. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite ?

Le programme réalisé sur la calculatrice montre que la suite semble converger vers 224,47 environ.

Démontrons-le :

On a : =81+60,75×+60,75×+60,75×+…+60,75×

donc : =81+60,75

Posons *S*=+++…+ Étape 4

on déduit : ×*S*=+++…+

donc : *S*−×*S*=−

donc : ×*S*=−

donc : *S*=×

donc : *S*=0,8−1,8×

Finalement : =81+60,75=129,6−109,35××

Or on sait que la limite de , lorsque *n* devient infini, est égale à 0

Donc la limite de est : 129,6=224,4737847…