BTS – Groupement C – Mathématiques – juin 2010

Exercice 1 (12 points)

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

1. *a)* Résoudre l'équation différentielle : $2y'' + y' - y = 0$,
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, y' est la fonction dérivée de y et y'' est la fonction dérivée seconde de y.

   b) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle (E) : $2y'' + y' - y = -x + 2$.

   c) En déduire les solutions de l'équation (E) sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. *a)* Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. *a)* Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
   b) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. Tracer l'asymptote $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire l'aire A, en cm^2, de la portion du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième de l'aire A.

Exercice 2 (8 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique de précision en matière plastique. Les questions posées se rapportent à la mesure d'une des cotes de cette pièce.

***Partie A** : Loi normale.*

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa cote en millimètres.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 60{,}3$ et d'écart type σ.

On qualifie de conforme toute pièce dont la cote est comprise entre 59,5 mm et 61,1 mm.

1. Dans cette question on pose $\sigma = 0{,}4$. Calculer la probabilité qu'un pièce prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2. Quelle valeur faut-il donner à l'écart type σ pour que la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à 0,99 ?

***Partie B** : Loi binomiale et loi de Poisson.*

On admet que 95 % des pièces produites sont conformes.

On note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 80 pièces prises au hasard dans la production, associe le nombre de pièces non conformes.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 80 pièces à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que l'on ait exactement trois pièces non conformes.

3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.
   a) Donner le paramètre de cette loi.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir au plus trois pièces non conformes.